Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano

Rodolfo Vergel

Este artículo aborda la emergencia de formas de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes y muestra evidencias sobre su evolución. En la primera parte se expone el problema, investigado a partir de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los estudiantes participan en actividades sobre generalización de patrones. La segunda parte presenta algunos constructos analíticos de la teoría de la objetivación. En la tercera se expone la metodología, destacando la recolección de los datos y su análisis. En el resto del trabajo se discuten algunos resultados que alimentan reflexiones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico.

Términos clave: Analiticidad; Generalización algebraica de patrones; Indeterminancia; Particular hegeliano; Pensamiento algebraico contextual; Pensamiento algebraico factual

Generalization of Patterns and Forms of Early Algebraic Thinking

This paper addresses the emergence of algebraic thinking forms in young students and we show evidences of their evolution. First, we present the research problem, it is tackled from the way in which new relationships between the body, perception and initiation of use of symbols are emerged and evolved while students participate in activities about generalization of patterns. In the second part, we show some analytical constructs on the theory of objectification. In the third part, we present methodology, highlighting data collection and their analysis. Finally, we discuss some results that feed reflections on the development of algebraic thinking.

Keywords: Algebraic generalization of patterns; Analyticity; Contextual algebraic thinking; Factual algebraic thinking; Hegelian particular; Indeterminacy

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico (PA) en niños y niñas de los primeros años de escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en Educación Matemática. En particular, la generaliza-

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

ción de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo, esto demanda desarrollar una perspectiva ampliada sobre la naturaleza del álgebra escolar que considere, entre otras cuestiones, una dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y procesos sobre generalización de patrones, lo cual introduce un problema en términos de la constitución del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes. Tal proceso de constitución podría darse en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra.

Emerge pues la necesidad de reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas. Epistemológicamente, los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Estos recursos incluyen comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, gestos, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards y Arzarello, 2009).

Por lo tanto, asumimos como un problema didáctico la emergencia de formas de pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones[1]. Dicha emergencia se explora en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones.

MARCO TEÓRICO

En la teoría de la objetivación (Radford, 2006, 2013a) se considera el saber constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Este podría adquirir realidad a través de la actividad concreta —la actividad que mediatiza el saber y el conocimiento—. El saber es una cristalización de labores humanas. En términos de Radford (2013a), el saber "es una forma ideal de acción, opuesto a las acciones en sí mismas" (p. 12).

Estos planteamientos tienen conexión con la idea expuesta por Davydov (1981), según la cual "el pensamiento de un hombre es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél" (p. 279). Es decir,

[1] El problema didáctico aludido se ha constituido en una preocupación no sólo de parte mía sino también de otros interlocutores con quienes he discutido y han aportado al análisis de la actividad matemática de los estudiantes participantes de la investigación. En términos bajtinianos, un enunciado no puede ser atribuido a un solo locutor. El enunciado es el producto de la interacción de los interlocutores, es el producto de toda situación social compleja, en la cual éste surgió. En consecuencia, prefiero discurrir a lo largo del artículo en la primera persona del plural.

el pensamiento se considera un proceso objetivo de la actividad humana, un movimiento de la civilización humana y de la sociedad.

Las ideas precedentes tienen asidero en la epistemología hegeliana. La figura 1 intenta capturar la relación entre lo general, lo particular y lo singular o individual de la terna hegeliana. Lo general (el saber), como ya hemos señalado, es pura posibilidad. El singular (conocimiento), según Radford (2013a), es el contenido conceptual concreto que conlleva, en su materialidad, la naturaleza abstracta de lo general. Según Maybee (2009, citado por Radford, 2013a), es el contenido de lo general, que se manifiesta en la reflexión teórica sensorial, la manera en que lo general tiene realidad. El particular es la mediación entre lo general y el singular, mediación fundamental ya que hace hincapié en la naturaleza mediada del conocimiento.

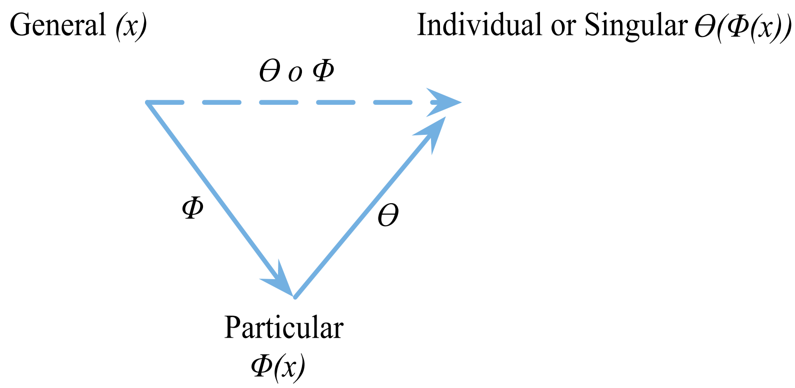


Figura 1. Terna hegeliana (Radford, 2013a)

La individualidad es lo que Radford (2013a), en la interpretación que hace de las ideas de Hegel (1837/2001), llama el conocimiento o el Singular. Por eso, el conocimiento es la instanciación o actualización del saber. La actualización es el proceso que Hegel llama el particular, y la instanciación es lo que, según Radford (2013a), Hegel llama el singular o individual. Por ello, el particular como actividad imprime su huella en la instanciación del saber; el conocimiento arrastra la huella de la actividad que lo media (Ilyenkov, 1977). Según Radford (2013a), "el particular como actividad demarca la manera en la cual el conocimiento instancia el saber" (p. 17).

La figura 1 muestra dos relaciones, Φ y Θ. En el nivel más general, el particular es la manera en la cual lo general se nos muestra (Radford, 2013a)[2]. Si lo general es una forma de pensar algebraicamente acerca de secuencias, entonces el particular es la actividad que requerirían el profesor y los estudiantes para lograr algún tipo de reflexión y acción que incorpore aspectos de este pensamiento algebraico (Radford, 2013a). Con respecto a la relación Θ, el particular se entiende como una actividad que actualiza el General en forma de una instancia Individual y es lo que expresa esta relación en la figura 1. La actividad es movimiento concreto actualizado, que lleva a una

[2] Los fenomenólogos hablan de la "manifestación", es decir, del modo de presencia de la forma ideal en el mundo concreto.

instanciación singular del general. Dentro de la teoría de la objetivación del saber, Radford (2013a, p. 32) plantea lo siguiente.

> *La actualización del general es articulada como un proceso emergente de instanciación [del general]. El adjetivo "emergente" significa que el salón de clase es visto como un sistema que evoluciona a través de "estados" y que esta evolución no puede ser determinada de antemano. Profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico. Dependerá de cómo los estudiantes y los profesores se involucran en la actividad, de cómo ellos respondan uno al otro, etc.*

El pensamiento algebraico

Asumimos esta clase de pensamiento como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Desde nuestras consideraciones filosóficas consideramos el pensamiento algebraico como un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. De acuerdo con Radford (2010b), una caracterización de este tipo de pensamiento está constituida por tres componentes: (a) el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. Consideramos estas tres componentes analíticas o vectores estrechamente relacionados.

Radford (2011) plantea que la indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o regla que permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño. Es decir, el sentido de la indeterminancia refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros (Radford, 2010b).

Radford (2010a) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos o lenguaje natural. La tipología de formas de pensamiento algebraico propuesta por Radford está en estrecha conexión con los tres vectores o componentes analíticos que lo caracterizan. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes.

Pensamiento algebraico factual. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números. Por esto, podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más dos".

Pensamiento algebraico contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total". Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ ó $2n-1$. En este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica (Radford, 2010a, p. 8).

Generalización algebraica de patrones y generalización aritmética

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010b), pues, entre otros aspectos, posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que se erigen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico. Esto sugiere poner atención en los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico en la escuela. De acuerdo con Radford (2008, 2013b), la generalización algebraica de patrones comporta las siguiente ideas.

- ♦ Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$).
- ♦ La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, ...$).
- ♦ La capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

La generalización de la comunalidad a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de la cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010b). En la figura 2, la identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013b), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales.

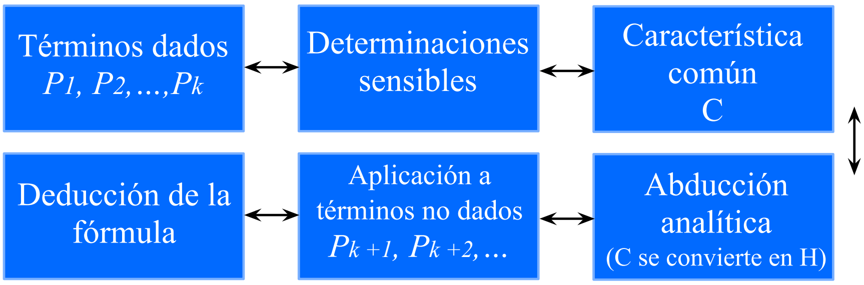


Figura 2. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales (Radford, 2013b)

La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible (Radford, 2013b, p. 6). Radford (2013b, p. 7) plantea que

> *Para que la generalización sea algebraica se requiere [...] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera* analítica*. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.*

De acuerdo con la definición de generalización algebraica de patrones, podemos hablar también de generalizaciones factuales y contextuales. Una generalización de tipo factual es aquella en la cual hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptual (Radford, 2003) como medios semióticos de objetivación. Lo general o lo indeterminado en este estrato de generalización quedan sin nombrar. Las generalizaciones contextuales, por su parte, suponen un nivel más avanzado, sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas. En este caso "se generalizan no solo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones" (Radford, 2003, p. 65). Estas generalizaciones "van más allá del dominio de las figuras específicas o particulares y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos" (p. 65).

Radford (2010b) señala que es posible encontrar casos de producciones matemáticas en estudiantes que no presentan las características de nuestra definición de la generalización algebraica de patrones. Si bien lo generalizado puede ser una comunidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. En este sentido, estamos frente a una generalización aritmética (Radford, 2010b).

METODOLOGÍA: RECOLECCIÓN DE DATOS Y ANÁLISIS

Los datos presentados provienen de una investigación doctoral que indagó por las formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de 9 y 10 años. La recolección de la información estuvo precedida por el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones. Este acopio se realizó en cuatro fases, y siguió las orientaciones de Miranda, Radford y Guzmán (2007). Estas se presentan a continuación.

Fase 1. Grabación en video de todas las actividades de clase. Esta grabación se realizó con una cámara que capturó, en algunos momentos, la sesión de clase completa, y en otros, discusiones focalizadas de algunos grupos en el aula de clase en el momento de resolver las tareas.

Fase 2. Obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante. Si la actividad no terminaba en una sesión, las hojas de trabajo se recogían y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión.

Fase 3. Transcripción de todos los videos correspondientes a las sesiones de trabajo.

Fase 4. Análisis de videos y de las hojas de trabajo en los cuales había evidencias de los procesos de resolución de las tareas sobre generalización de patrones.

A partir de estas cuatro fases y de sus respectivos análisis, especialmente con base en las tareas propuestas sobre generalización de patrones, en las entrevistas focalizadas (grabadas también en video) profundizamos en el pensamiento matemático de los estudiantes, los tipos de respuestas que daban y sus justificaciones. Queríamos inquirir aspectos que iban emergiendo en el proceso, tales como respuestas no muy claras que los estudiantes suministraban, así como las interacciones en pequeños grupos en los cuales solicitábamos que algún estudiante explicara a otro su proceso de solución.

También nos interesaba concentrar la entrevista en ciertos aspectos temáticos claves, como por ejemplo la manera como identificaban la comunalidad, el tipo de gestos que movilizaban y detectar, quizás, la movilización de varios recursos semióticos sincrónicamente, es decir, identificar la presencia de nodos semióticos. No estábamos interesados en valorar respuestas correctas o incorrectas, sino en estudiar los procesos que desarrollaban los estudiantes (Goldin, 2000), en los cuales se podía identificar cierta evolución de medios semióticos de objetivación y cómo unos sustituían a los anteriores, al mismo tiempo que los estudiantes lograban concentrar los significados.

Las tareas planteadas estuvieron sujetas a un "control experimental" (Goldin, 2000), en las cuales, fue necesario considerar variables como, por ejemplo, el contenido matemático y la estructura, la complejidad y la estructura lingüística y semántica. Estamos de acuerdo con Goldin (1997) cuando precisa que "un objetivo importante es obtener e identificar los procesos que los niños utilicen de forma espontánea" (p. 53). En otras palabras nos interesaba indagar las razones que motivaban a los niños y niñas a actuar de cierta manera en algún momento. Aún más, éramos conscientes de que estábamos actuando en un contexto social, psicológico y cultural. Siguiendo al autor, "el contexto influencia y permite contrastes en las interacciones que ocurren durante la entrevista y pone limitaciones en las posibles inferencias" (p. 58).

Las actividades representadas en las producciones de los estudiantes y en los diálogos se encuentran enmarcadas en la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación propuesta por Radford (2006, 2013a). Nuestro análisis se basa en una concepción multimodal del pensamiento humano (Radford, Edwards y Arzarello, 2009), a partir del cual nos interesa la inclusión del cuerpo en el acto de conocer. En este sentido, es clave en este análisis la consideración y relación de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

Consideremos la figura 3, que muestra parte de una de las tareas propuestas en la investigación doctoral.

Figura 3. Secuencia figural apoyada por representación tabular investigada

A partir de algunos ítems como "Calcula el número de círculos de la Fig. 9, sin construirla. Explica cómo lo haces", comenzamos a indagar en uno de los estudiantes, Laura Sofía (LS), la manera como había abordado el requerimiento. A continuación, presentamos parte de las conversaciones con la profesora Johanna (PJ) y el profesor Rodolfo (PR).

L1. *PJ:* ¿Alguien lo construyó diferente?

L2. *LS:* Sumando 9 más 9 da 18 y 3 [pausa] 21.

L3. *PR:* Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?

L4. *PJ:* Sí, enséñame acá en la figura [señala con su mano la secuencia] ¿cómo es?

L5. *LS:* Porque 1 más 1 da 2 [pausa] [tapa con sus dedos el primer círculo de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo] sumándole 3 [hace circular su dedo alrededor de los tres círculos que sobran en la figura 1 después de contar el primero de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo], [estos tres círculos los denomina "la torre"].

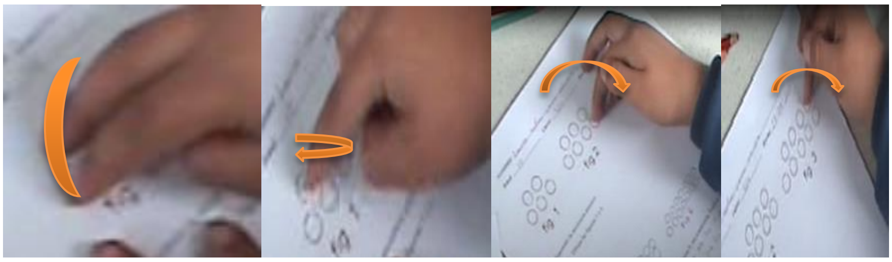
L6. *PJ:* ¿Y en la figura número 2?

L7. *LS:* 2 más 2, 4 [pausa] [a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba], sumándole 3 [con su dedo índice derecho señala la torre].

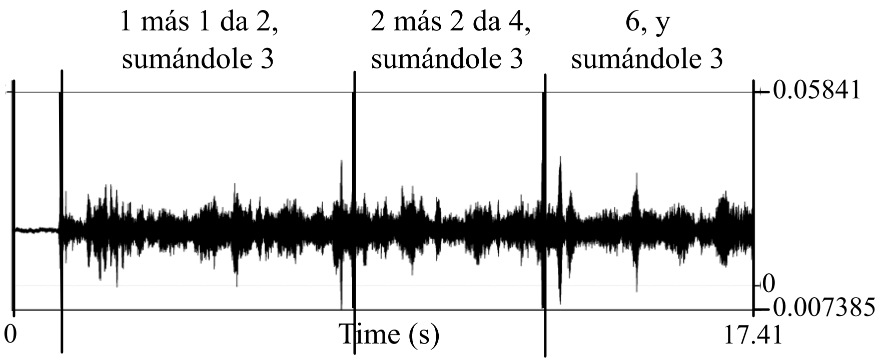
L8. *PJ:* ¿Y en la figura 3?

L9. *LS:* 6 [pausa] [ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha] y sumándole 3 [con su dedo índice derecho señala la torre].

En la figura 4, cuadro 1, se muestra la secuencia de gestos (señalamientos) que despliega Laura Sofía acompañada de palabras (reconstrucción del video). El cuadro 2 muestra un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de Laura Sofía (L5, L7, L9) con intervenciones de la profesora Johanna (L6 y L8).



Cuadro 1



Cuadro 2

Figura 4. Secuencia de gestos y análisis prosódico de Laura Sofía

La solicitud que hace el profesor Rodolfo (L3), "Y eso de 9 más 9, 18 ¿cómo lo haces en la figura?", provoca una respuesta en la estudiante. Ella despliega una serie de señalamientos en la secuencia, los cuales recorren las tres figuras dadas. En la figura 4, cuadro 1, se muestra la cadena de gestos como señalamientos que le permite comunicar a Laura Sofía la objetivación del patrón acudiendo a la torre como recurso semiótico. En el cuadro 2 de la figura 4 mostramos un fragmento de 17.41 segundos a través del programa Praat, en el cual ella en una estructura casi rítmica, como lo muestra la forma de onda, hace sus elocuciones "1 más 1 da 2, sumándole 3", "2 más 2 da 4, sumándoles 3", "6, y sumándole 3".

La figura 5 muestra la movilización de dos gestos indexicales. El primero corresponde a la acción de tapar los círculos subitizadamente y, al hacer una pausa, luego despliega el segundo gesto indexical señalando la torre. De esta manera, procede con las figuras 2 y 3. Sin embargo, según las observaciones en el diálogo (L7) notamos que a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba. En L8, por su parte, ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha para luego señalar de nuevo la torre.

El análisis prosódico sugiere que el ritmo emerge como un medio semiótico de objetivación, evidenciado en el conteo, la pausa hecha y luego el gesto de señalar la torre. El ritmo crea la expectativa de un próximo evento (You, 1994). Además, "constituye un medio semiótico de objetivación crucial para hacer aparente el sentimiento de un orden que va más allá de figuras particulares" (Radford, 2010b, p. 50).

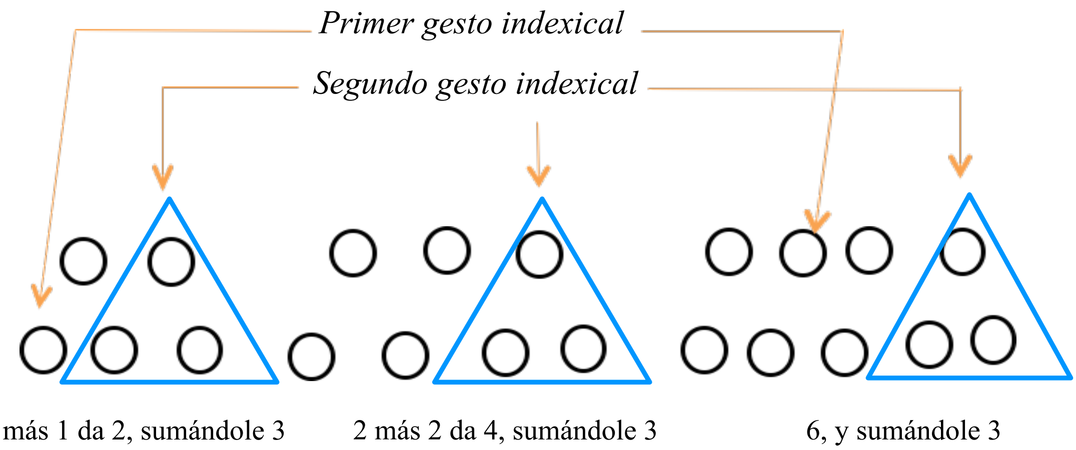
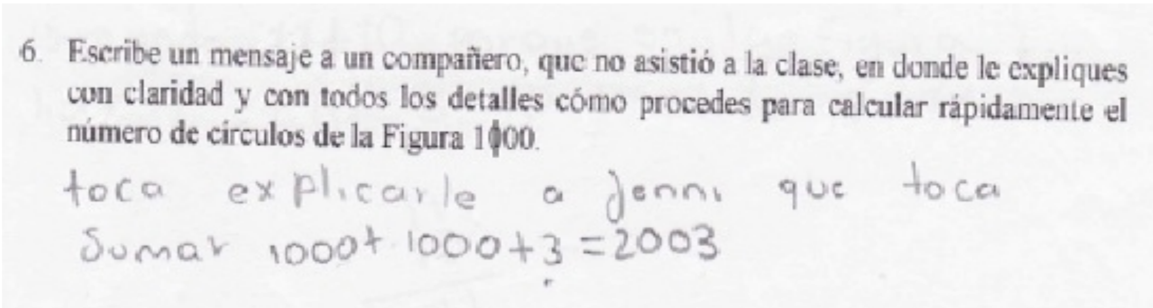


Figura 5. Movilización de gestos indexicales por parte de Laura Sofía

El recurso semiótico de la torre que emerge se convierte en un medio semiótico de objetivación importante que le sirve, entre otras cosas, a Laura Sofía para contar el número de círculos de la fila de arriba y el de la fila de abajo, los cuales son iguales. En este proceso de semiosis perceptual, la actividad de coordinación de deícticos espaciales (gestos como señalamientos), ritmo, palabras y actividad perceptual, se convierte en un nodo semiótico (Radford, 2013b) que caracteriza la actividad reflexiva de Laura Sofía mediada por estos medios semióticos de objetivación.

El análisis microgenético (Vygotsky, 1978) de su actividad sugiere el papel central que desempeñan los deícticos espaciales, gestos y el ritmo en la semiosis perceptiva (Radford, Bardini y Sabena, 2006), sobre todo en los procesos progresivos de Laura Sofía de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización. En su actividad perceptual, al separar la torre, esta estudiante percibe la igualdad en el número de círculos de arriba y de abajo.

Inclusive, podemos ir más allá y afirmar que, a partir de su intención perceptiva, Laura Sofía en una forma subitizada cuenta el número de círculos de arriba y el número de círculos de abajo al notar la separación de la torre en la figura 3: "6, y sumándole 3". Observemos que ella efectúa una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional. Este esquema permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación. Esta generalización de acciones numéricas incrusta su huella en la sintaxis de la formulación que expresa en relación con el Ítem 6. Su declaración (figura 6), “toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000 + 1000 + 3”, sugiere la aplicación del esquema operacional pues la forma como ha procedido para calcular el número de círculos de las figuras 1, 2 y 3 la pone en marcha para el cálculo del número de círculos correspondiente a la figura 1000. Observemos que aquí lo indeterminado o lo general queda sin nombrar. En otras palabras, Laura Sofía ha afectuado una generalización algebraica factual (Radford, 2003).


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

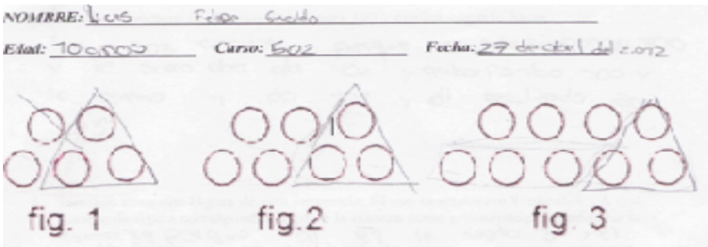
toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000+1000+3=2003

Figura 6. Producción de Laura Sofía en el Ítem 6 de la tarea propuesta

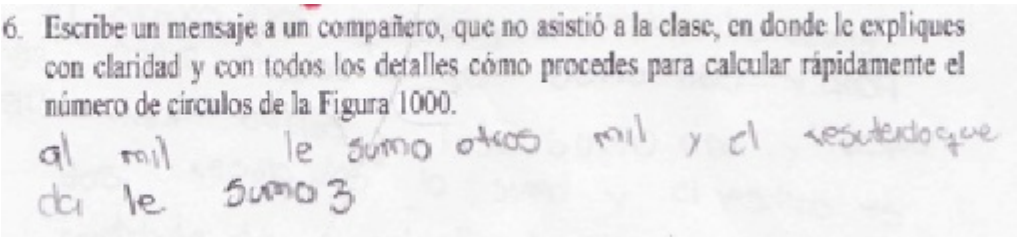
Consideramos la expresión semiótica producida por Laura Sofía como parte de la instanciación del saber, entendido éste como forma de pensamiento algebraico factual (Radford, 2013a). Desde nuestra epistemología hegeliana, el saber está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Como dice Radford (2013a), el saber es pura posibilidad. Adquiere realidad a través de la actividad concreta tal y como se desarrolla. Esto es, el pensamiento algebraico factual se actualiza a través del Particular, es decir, a través de la actividad en tanto evento. Esta actividad o labor conjunta se conforma no sólo de las preguntas y solicitudes emergentes que hace la profesora Johanna (L1, L4, L6, L8), sino también de la actividad semiótica de Laura Sofía por medio de la movilización de recursos semióticos (L5, L7, L9).

Desde nuestra perspectiva hegeliana, sugerimos que Laura Sofía está actualizando una forma cultural de acción y reflexión la cual se materializa en la actividad teórica sensorial (particularidad) de reflexión sobre lo que es requerido para responder acerca del mensaje de la figura 6. Consideramos dicha reflexión sobre una secuencia específica como lo Singular o Individual en los planteamientos de Hegel. En términos de Radford (2013a), Laura Sofía lleva a cabo su actividad dentro de un particular e irrepetible actividad de salón de clase —un Particular—, el cual es un único evento al escribir el mensaje en el que explica a un compañero cómo calcular rápidamente el número de círculos de la figura 1000 en un cierto momento y lugar y a través de una cierta relación con los compañeros y la profesora.

La discusión entre Laura Sofía, la profesora Johanna y el profesor Rodolfo es capitalizada por los demás compañeros de la clase. Particularmente, Luis Felipe se apropia de este recurso cultural (la torre), pero en realidad es apropiado por un buen número de estudiantes. En la figura 7 mostramos parte del proceso de semiosis perceptual de Luis Felipe al identificar la torre. En el cuadro 1, la torre como medio semiótico de objetivación presente en el proceso de semiosis perceptual de Luis Felipe. El cuadro 2 muestra la producción de Luis Felipe sobre el Ítem 6 de la tarea.



Cuadro 1


6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

al mil le sumo otros mil y el resultado que da le sumo 3

Cuadro 2

Figura 7. Producción de Luis Felipe

Este medio no es un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes. Funge como medio semiótico de objetivación en tanto media los actos intencionales de Luis Felipe. Las evidencias sugieren que las diversas instanciaciones del saber (en este caso el pensamiento algebraico factual), esto es, el conocimiento que va logrando llega a ser conocimiento-con la torre, como opuesto a conocer vía la torre. Como lo sugiere Radford (2012b), estos artefactos se incrustan o encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer, son instrumentos que recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano (Cole y Wertsch, 1996; Vygotsky, 1929).

Destacamos aquí que para instanciar una forma de pensamiento como el algebraico factual, es fundamental la experiencia de los estudiantes en el acto de conocer y el hecho de que esta experiencia está mediada por el propio cuerpo (Radford, Edwards y Arzarello, 2009), tal y como lo evidencian las actuaciones de los estudiantes en esta tarea. Para Luis Felipe, la encarnación (*embodiment*) de la fórmula en la acción y en el lenguaje natural es potente, pero tiene sus límites. Lo indeterminado en sí no aparece como objeto de discurso. En este caso podríamos hablar, al menos, de dos indeterminadas o variables: el número de la figura (variable independiente) y el número de círculos en posición horizontal (variable dependiente).

En la idea de indagar más de cerca sobre la manera como usaban la comunalidad que ya habían identificado para calcular el número de círculos de figuras remotas, proseguimos en el siguiente diálogo con Luis Felipe (LF) y otro estudiante (Kevin).

L10. *PR:* Ahora entonces llegamos a 8000. Entonces Kevin, ¿cómo haces?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos de la figura 8000?

L11. *K:* (…) toca multiplicar por 2.

L12. *PR:* Sí.

L13. *K:* Y a lo que multiplico toca sumarle 3.

L14. *PR:* ¿Y por qué le sumamos 3?, yo estoy intrigado con ese 3, ¿por qué hay que sumarle 3?

L15. *K:* Porque (…) [Luis Felipe interrumpe a Kevin y responde].

L16. *LF:* Porque siempre le vamos a sumar acá, la torre [Luis acude a señalar la figura No. 2 con dos dedos de su mano derecha haciendo énfasis en el lugar de la torre].

Luis Felipe interviene apoyando la respuesta de Kevin y justificando la suma del tres (esto es, los tres círculos que conforman la torre) (ver figura 8). Es más, este estudiante reconoce que el hecho de multiplicar por dos, tal y como lo declara Kevin (L11), emerge luego de separar la torre.

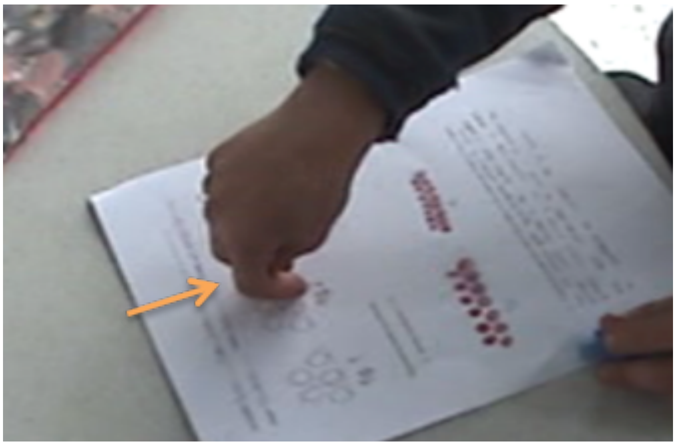


Figura 8. Luis Felipe moviliza el gesto de señalar la torre como apoyo para responder el número de círculos de la figura 8000

Observemos que en su declaración en L16 "siempre le vamos a sumar acá, la torre", el deíctico temporal *siempre* sugiere el reconocimiento y uso del recurso semiótico, es decir, que esos tres círculos se deben sumar independientemente cuál sea la figura particular. El adverbio siempre evidencia una de las funciones generativas del lenguaje, es decir, funciones que hacen que sea posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se pueden llevar a cabo en una forma reiterativa, imaginada (Radford, 2003). "Son expresiones lingüísticas *ad hoc* que transmiten la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones" (Radford, 2003, p. 49). Por su parte, a través del deíctico espacial acá, Luis Felipe concentra la mirada en el lugar en el cual debe situarse la torre. Podemos afirmar que el lenguaje natural le sirve de apoyo para poder expresar una fórmula en acción. Esto sugiere pensar en la manera como los estudiantes usan el lenguaje natural o, más específicamente, ciertos elementos de este lenguaje (deícticos espaciales y temporales, por ejemplo) que indudablemente quedan muy implícitos en el lenguaje simbólico, esto es, en una fórmula algebraica (con signos alfanuméricos).

En síntesis, el diálogo, como parte de la labor conjunta o actividad, sugiere que los estudiantes no sólo han tomado conciencia de la característica común sino que la han generalizado, es decir han propuesto una abducción, la cual se aplica a los términos subsecuentes de la secuencia. Esto les permite encontrar el número de círculos de figuras grandes o remotas. En L13, Kevin dice "y a lo que multiplico toca sumarle 3", refiriéndose a una figura "grande" particular. En L14, el profesor Rodolfo inquiere sobre la suma del 3, ante lo cual Luis Felipe responde, en L16, apoyándose en la torre como recurso semiótico que emerge condicionando su actividad semiótica y su proceso cognitivo. En una especie de plasticidad semiótica (D'Amore, Fandiño e Iori, 2013, p. 82), Luis Felipe usa la torre y esta, de alguna manera, influencia, modifica, e incluso modela su mente. Observemos cómo a partir de la Fig. 2, él observa que aislando este recurso semiótico le quedan dos círculos arriba y dos abajo. Esto le permite responder adecuadamente en relación con el número de figuras remotas.

Del análisis de estas producciones es posible afirmar que hay generalización algebraica factual en el sentido que le confiere Radford (2003, 2008, 2013b). En efecto, la abducción o generalización de la característica común extraída del trabajo sensible sobre las Fig. 1 a 3 es usada analíticamente. En otras palabras, la abducción, convertida en hipótesis, es aplicada para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier figura particular. Esto tiene razón de ser debido a la estructura de nuestro particular hegeliano (relaciones Φ y Θ). El tipo de preguntas o requerimientos que hacemos junto con la actividad desplegada influyen en el hecho de que la hipótesis sea aplicada. Por supuesto, dicha hipótesis o principio asumido descansa sobre una generalización de acciones numéricas y en la forma de un esquema numérico.

En este estrato de pensamiento algebraico factual, la indeterminancia no alcanzó el nivel de la enunciación, pues se expresó en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números y procesos de generalización de acciones numéricas. En este sentido, podemos señalar que en este estrato la indeterminancia quedó implícita o, a lo más, mostrada pero a partir de casos o hechos particulares de números, o encarnada en la percepción, gestos y palabras. La forma de pensamiento algebraico factual, en tanto forma ideal que pre-existe en la cultura (Radford, 2012a), fue instanciada en la actividad a través de los medios semióticos de objetivación movilizados por los alumnos (gestos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras). En otras palabras, es a través de la materialidad de la actividad que esta forma de pensamiento algebraico pudo aparecer y los estudiantes pudieron tomar conciencia de ella. En otras palabras, creamos condiciones particulares de interacción entre la forma ideal y los alumnos (Radford, 2012a) evidenciadas a través de la estructura de nuestro Particular hegeliano (relaciones Φ y Θ) que permitieron un desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

La expresión semiótica tuvo lugar a través de una actividad multimodal en la que intervienen los gestos, el ritmo, la percepción y las palabras. Los estudiantes constituyeron una fórmula encarnada en la acción y en el lenguaje (Radford, 2013b). De manera sintética, en términos de la epistemología hegeliana, la naturaleza de los tres vectores o componentes analíticos en los que el pensamiento algebraico (en este caso factual) encuentra sus bases, está determinada por la estructura del Particular hegeliano.

En la actividad queríamos también indagar por los medios semióticos de objetivación que lograran movilizar los estudiantes al enfrentar secuencias que no cuentan con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular (figura 9).

2	5	8
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 9. Secuencia numérica apoyada por representación tabular investigada

Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (figura 10). Su producción con respecto a este ítem es “toca sumar desde: 17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44”, sugiere que el número 9 obtenido por la diferencia entre el Término 15 y el Término 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.

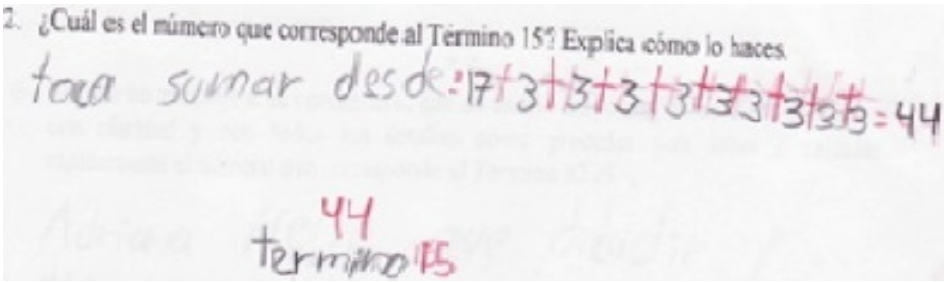


Figura 10. Producción de Yaneth sobre el Ítem 2 de la tarea secuencia numérica apoyada por representación tabular

La característica común identificada por Yaneth (aumentar 3) a partir de su respuesta al Ítem 2 es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al Término 15. Esta abducción (generalización de la característica común) es utilizada como simple posibilidad, es decir algo que es solamente plausible (Radford, 2013b). La evidencia de su producción sugiere que la abducción no es utilizada de manera analítica.

Más específicamente, Yaneth parece recurrir a una generalización muy sofisticada que se podría simbolizar así: se parte de un término cualquiera conocido T_a y se quiere hallar T_n. Entonces ella procede haciendo $T_a + (n-a)x3 = T_n$. Yaneth efectúa una generalización aritmética. No es de naturaleza algebraica, pues la abducción no se constituye en principio asumido o hipótesis para deducir apodícticamente una fórmula que le proporcione el número correspondiente a cualquier término de la secuencia numérica (Radford, 2013b). Esto es, la abducción no es todavía analítica. En este momento de la actividad la ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales) parece provocar un trabajo de generalización por parte de Yaneth basado en relaciones entre números. Esto sugiere pensar que no existe tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica).

Contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico. Es más, la descomposición de figuras permite la creación de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas y hacer cálculos sin distinguir entre estas.

En el marco de la investigación doctoral pretendíamos que los estudiantes nombraran la indeterminancia algebraica. En este sentido, era pertinente promover en ellos producciones textuales autónomas (TEPs) en el sentido desarrollado por D'Amore y Maier (1999, 2003). Los TEPs son "producciones en las cuales el estudiante, puesto en la condición de desear expresarse en forma comprensible y usando un lenguaje personal, acepta liberarse de condicionamientos lingüísticos y hace uso de expresiones espontáneas" (D'Amore y Maier, 2003, p. 2). Por lo tanto, decidimos proponer este problema para hacer aparecer formas más complejas de pensamiento algebraico. En términos hegelianos, estábamos interesados en orquestar una actividad que intentara propulsar el saber (evolucionar), entendido a esta altura del trabajo, como forma de pensamiento factual.

El problema del mensaje que propusimos tomaba como base la secuencia figural apoyada por representación tabular de la tarea anterior (figura 3). El problema lo planteamos en los siguientes términos.

> *La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre, asegurándose de que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.*

Presentamos la producción de Jimmy Stiven quien explica al profesor Rodolfo y a los demás compañeros del grupo el mensaje que escribió a la profesora Estella (figura 11). Es interesante aquí observar cómo una vez escribe su mensaje se remite a la secuencia, particularmente a la figura número 2 (ver figura 3), que le sirve de apoyo para hacer su explicación. En este proceso retorna a la torre como ejemplo para apoyar y afianzar su mensaje.

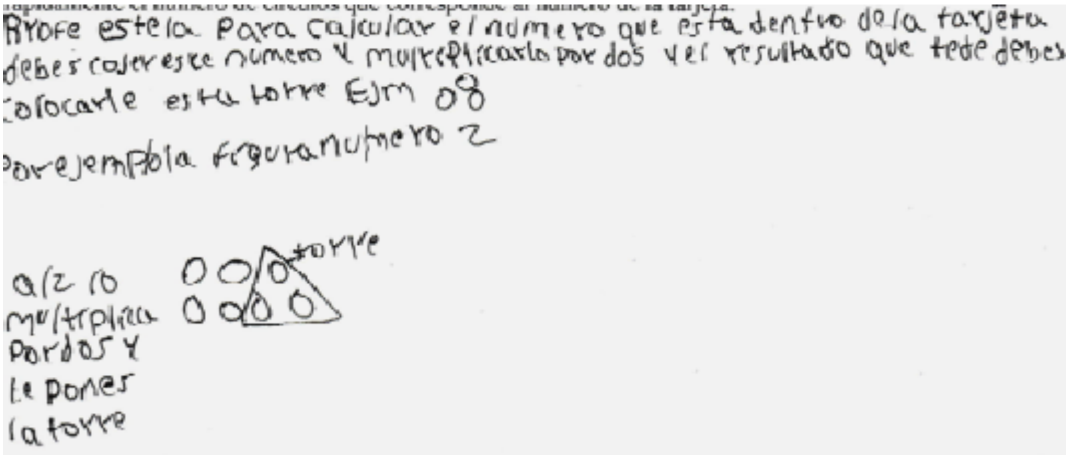
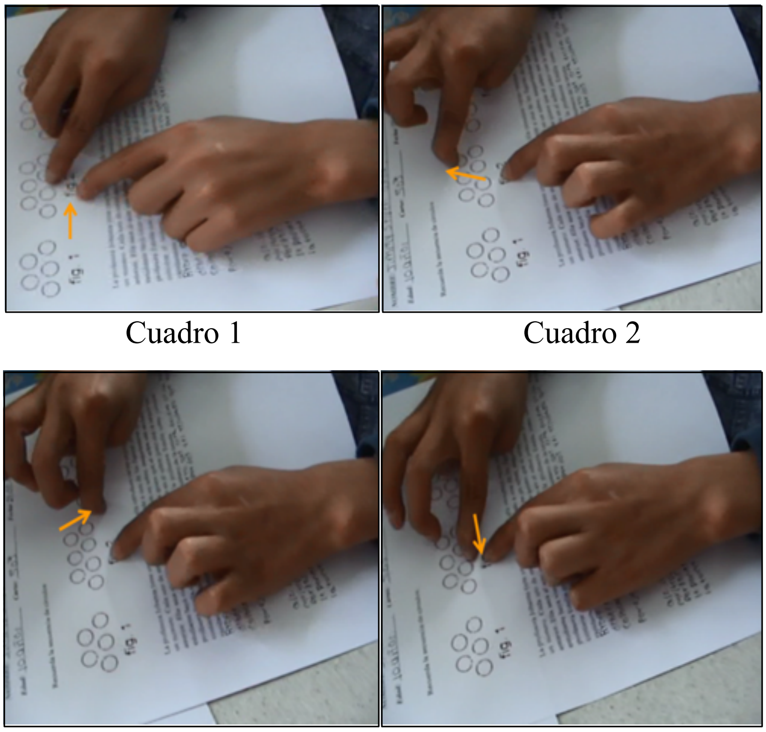


Figura 11. Producción de Jimmy Stiven sobre el problema del mensaje

En este proceso, Jimmy Stiven, con sus dedos, realiza una serie de deslizamientos acompañados con acciones de tocar (ver figura 12).



Cuadro 1 Cuadro 2

Cuadro 3 Cuadro 4

Figura 12. Secuencia de gestos (señalar y tocar) de Jimmy Stiven

Mientras que con su dedo índice de la mano izquierda señala y toca el número de la figura, con su dedo índice de la mano derecha empieza a recorrer la torre en una especie de deslizamiento oblicuo (cuadros 1 y 2 de la figura 12). Observamos aquí dos gestos que moviliza Jimmy Stiven, los cuales tienen roles distintos. Los cuadros 3 y 4 (figura 12) muestran el deslizamiento hacia abajo y luego horizontal de sus dedos para terminar de señalar la torre al mismo tiempo que con su dedo índice izquierdo señala y toca el número de la figura. Esta serie de gestos (deslizar y tocar) sirve como apoyo a Jimmy Stiven para reafirmar el mensaje escrito a la profesora Estella. Si bien, Jimmy Stiven ya elaboró un mensaje que permite calcular el número de círculos para cualquier figura a partir del término general $2n+3$, siente la necesidad de dar un ejemplo, el cual involucra la torre. Este proceso de señalar, tocar y deslizar combinado con palabras para explicar la manera de calcular el número de círculos de una figura cualquiera lo entendemos como una fórmula corpórea o corporeizada. Más aún, dicha acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un nodo semiótico (Radford, 2013b), esto es, un segmento de la actividad semiótica en la que signos pertenecientes a diferentes sistemas semióticos (Radford, 2003) se complementan para generar una toma de conciencia, en este caso, de la manera en que la tarea puede ser atacada desde un punto de vista algebraico.

En este caso, la indeterminancia de la producción de Jimmy Stiven está representada por la sentencia o frase "el número que está dentro de la tarjeta". Observemos, de un lado la expresión semiótica o designación simbólica a través de un recurso lingüístico y, de otro lado, el carácter operatorio "debes coger ese número y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejemplo ".

En el trabajo desarrollado en esta tarea sugiere que la actividad hace aparecer una forma de pensamiento algebraico (contextual) como una evolución del pensamiento algebraico factual. Este resultado es importante, pues posiciona el problema del mensaje en tanto hace posible nombrar finalmente lo indeterminado y operar con este (indeterminancia analítica). En la tabla 1 presentamos una rejilla que muestra las expresiones semióticas de las indeterminancias y sus respectivos caracteres operatorios de las producciones de los estudiantes Jimmy Stiven, Luis Felipe, Yaneth, Sunner y Astrid, las cuales fueron identificadas en la investigación, como casos que consideramos representativos.

Tabla 1
Rejilla de expresiones semióticas

Estudiante	Expresión semiótica de la indeterminancia	Analiticidad o carácter operatorio de la indeterminancia
Jimmy Stiven	"el número que está dentro de la tarjeta"	"debes coger ese número y multiplicarlo por dos y ese resultado que te de debes colocarle esta torre ejm "
Luis Felipe	"figura"	"a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo tres"
Yaneth	"el número que le salga en la tarjeta"	"sumar el número que le salga en la tarjeta dos veces y le suma más tres"

Tabla 1
Rejilla de expresiones semióticas

Estudiante	Expresión semiótica de la indeterminancia	Analiticidad o carácter operatorio de la indeterminancia
Sunner	"el número que te entregaron"	"El número que te entregaron tienes que multiplicarlo por dos y el número que te dio le sumas tres"
Astrid	"el número que esté en la cartulina"	"El número que esté en la cartulina lo tienes que colocar en la parte de arriba y en la parte de abajo y le sumas tres"

Desde la caracterización de generalización algebraica de patrones propuesta por Radford (2013b), podemos señalar que los estudiantes han identificado la comunalidad o característica común que ha sido extraída del trabajo sensible sobre las Fig. 1 a 3 (figura 3), (característica que conlleva a notar que, una vez separada la torre, lo que multiplica debe sumarle 3). La abducción de esta característica ha sido traducida (implícitamente) en hipótesis y esta es usada para determinar una expresión o fórmula que permite infaliblemente calcular directamente cualquier término de la secuencia.

Observemos cómo el contenido del problema del mensaje posibilita designar la indeterminancia (volverla objeto de discurso), por ejemplo, cuando afirman $\#\, figura \times 2 + 3$ (otras instanciaciones: "a la figura le sumo el mismo número de la figura y al resultado que me dé, le sumo tres", "el número que te entregaron tienes que multiplicarlo por dos y el número que te dio, le sumas tres". Aquí hay evidencia de una analiticidad característica de la generalización algebraica. También hay evidencia de un carácter operatorio de lo indeterminado, es decir, una analiticidad característica del pensamiento algebraico.

Síntesis y comentarios finales

Este artículo contribuye a la reflexión sobre la emergencia o aparición de formas de pensamiento algebraico temprano. Mostramos cómo las formas de pensamiento algebraico temprano factual y contextual emergen o aparecen como posibilidades que los estudiantes instancian en la actividad. Esta la entendemos, en su estructura, como el diseño didáctico de las tareas y el evento o actividad tal y como ocurrió en cada caso, es decir como se desplegó a partir de los diálogos que sostuvieron los estudiantes entre sí, con la profesora Johanna y con el investigador. Las evidencias analizadas nos permiten constatar que es en la materialidad de la actividad donde el estudiante puede tomar conciencia de estas formas de pensamiento algebraico.

Mostramos que los tres vectores que caracterizan el pensamiento algebraico (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica) cambian según lo hace el particular hegeliano. Los análisis realizados sugieren que la actividad, en general, desarrollada antes del problema del mensaje, no invita a pensar la indeterminancia en forma analítica. Este resultado se debió a que las exigencias establecidas en las tareas antes de este problema propiciaron posibilidades de expresión semiótica en los estudiantes pero al mismo tiempo impusieron ciertos límites. Los mensajes elaborados por los estudiantes se supeditaron al trabajo sobre figuras o términos lejanos pero particulares. Antes de este problema, la indeterminancia y la analiticidad aparecieron en una forma intuitiva y la primera quedó sin nombrar.

Este trabajo sugiere la presencia de dos analiticidades. Una analiticidad relativa a la generalización algebraica como deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas y otra asociada al carácter operatorio de la indeterminancia, la cual constituye una de las características del pensamiento algebraico. Postulamos que este tipo de pensamiento, desde la caracterización sugerida por Radford (2010b), engloba la generalización algebraica de patrones también caracterizada por este autor (Radford, 2013b). Es más, conjeturamos que, al parecer, la analiticidad generalización algebraica propulsa la analiticidad del pensamiento algebraico, instanciando una forma de pensamiento algebraico contextual, pues la indeterminancia es analítica.

Los análisis llevados a cabo en este estudio ponen en evidencia que las secuencias figurales con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no son movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas con apoyo tabular. El análisis de los procesos de generalización a los que recurren los alumnos (caso de Yaneth, por ejemplo) en el caso de la secuencia numérica con apoyo tabular parece provocar un trabajo de generalización basado en relaciones entre números. Aun cuando identificamos en este caso una generalización muy sofisticada, no evidenciamos un tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica). No obstante, creemos que el particular hegeliano puede jugar un papel preponderante en la idea de hacer evolucionar la generalización aritmética hacia una generalización de tipo algebraica. Pero podemos afirmar que el hecho de contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico.

En el problema del mensaje, los alumnos tuvieron que movilizar otros medios semióticos de objetivación. En este caso, recursos lingüísticos que permitieron instanciar otra forma o estrato de pensamiento algebraico como lo es el contextual. Es decir, una forma de pensamiento algebraico que está en continuidad con el factual pero que va más lejos. En consecuencia, podemos afirmar que hay una evolución del pensamiento algebraico factual hacia el contextual. Las expresiones semióticas antes y durante el problema del mensaje son distintas. En el primer caso se instanciaron expresiones como, por ejemplo, $1000\times 2+3$, mientras que en el segundo caso se produjeron expresiones como $\#\mathit{figura}\times 2+3$. En este estrato de pensamiento algebraico contextual, la indeterminancia se tradujo en un objeto del discurso por parte de los estudiantes. El problema del mensaje funcionó como elemento clave de la actividad en la aparición de formas más complejas de pensamiento algebraico.

El medio semiótico de la torre no constituyó un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes. Surgió como un recurso semiótico en tanto medió sus actos intencionales. La denominación lingüística de “la torre”, por parte de los estudiantes, constituye un hallazgo de esta investigación que no ha sido reportado en otros trabajos en educación matemática. Las evidencias que analizamos sugieren que las diversas instanciaciones del saber (por ejemplo, pensamiento algebraico factual), esto es, el conocimiento, que van logrando los estudiantes, llega a ser conocimiento-con la torre, como opuesto a conocer vía “la torre”. Este recurso semiótico reguló en cierto momento la actividad matemática de estos estudiantes, en tanto condicionó las formas como ellos se apropiaron o re-significaron dicha actividad y desde luego las maneras de pensar. Este hallazgo coincide con los planteamientos de Radford (2012b) en el sentido que estos artefactos se encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer.

En este contexto, mostramos que la analiticidad aparece mediada por los medios semióticos de objetivación. La denotación se hace a través de una actividad multimodal en la que intervienen la percepción, los gestos y el lenguaje natural. Los alumnos llegan a constituir fórmulas encarnadas en la acción y en el lenguaje que se aplican a cualquier término o figura particular. La potencia del problema del mensaje es evidente. Los estudiantes lograron hacer una generalización algebraica de patrones (Radford, 2008), pues a partir de la identificación de una característica común, lograron plantear una abducción que se tradujo luego en principio asumido, lo cual les permitió deducir apodícticamente una fórmula que proporcionó el valor de cualquier figura.

Esta investigación muestra que recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. Los análisis sugieren el papel importante del ritmo como medio semiótico de objetivación. En el proceso de semiosis perceptiva, presentamos análisis de evidencias que indican cómo la coordinación de deícticos espaciales, ritmo, palabras y actividad perceptual constituye un nodo semiótico (Radford, 2003), el cual caracteriza la actividad reflexiva de algunos estudiantes, sobre todo en los procesos progresivos de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización.

Agradecimiento

Este artículo presenta algunos resultados de la investigación doctoral “Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)”, desarrollada en el marco del Programada de Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en Bogotá, Colombia.

REFERENCIAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 9*(1), 267-300.

Cole, M. y Wertsch, J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotsky. *Human Development, 39*, 250-256.

D'Amore, B., Fandiño, M. I. e Iori, M. (2013). *La semiótica en la Didáctica de la Matemática.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

D'Amore, B. y Maier, H. (1999). Investigating teachers' work with pupils' textual eigenproductions. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 257-274). Osnabrück, Alemania: European Society for Research in Mathematics Education.

D'Amore, B. y Maier, H. (2003). Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Epsilon, 18*(2), 53, 243-262.

Davydov, V. V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Goldin, G. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, chapter 4, 9,* 40-62, 164-177. doi: 10.2307/749946

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey, NJ: LEA publishers.

Hegel, G. (1837/2001). *The philosophy of history.* Kitchener, ON: Batoche Books.

Ilyenkov, E. (1977). *'The concept of the ideal'. In Philosophy in the USSR: Problems of dialectical materialism.* Moscú, Rusia: Progress Publishers .

Maybee, J. (2009). *Picturing Hegel.* Lanham, MD: Lexington Books.

Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studens' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, *9*(l), 267-299.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012a). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)* (pp. 675-694). Seúl, Korea: National University of Education.

Radford, L. (2012b). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources* (pp. 238-288). New York, NY: Springer.

Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44. doi: http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L., Bardini, C. y Sabena, C. (2006). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. En M. Bosch (Ed.), *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 684-695). Sant Feliu de Guíxols, Spain: European Society for Research in Mathematics Education.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 9-95.

Vygotsky, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology, 36*, 415-434.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

You, H. (1994). Defining rhythm: Aspects of an anthropology of rhythm. *Culture, Medicine and Psychiatry, 18*, 361-384.

Rodolfo Vergel
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
rodolfovergel@gmail.com